Caso 7: Selección de Títulos

En este caso vamos a abordar el problema de selección de títulos, determinando una cartera que cumpla con ciertos requisitos de rentabilidad y riesgo. Para ello emplearemos el modelo de media-varianza de Markowitz.

Modelo media-varianza

Sean $T_1,...T_n$ un conjunto de títulos de los que se conoce sus rentabilidades a lo largo de p periodos. Denotaremos por R_{it} la rentabilidad del título T_i en el periodo t:

	T_1	…	T_n
t=1	R_{11}	…	R_{n1}
	… R_{1t} …	…	… R_{nt} …
t=p	R_{1p}	…	R_{np}

Podemos considerar la rentabilidad de cada uno de los títulos como una variable aleatoria, R_i, considerando la esperanza matemática de dicha variable aleatoria como medida de la rentabilidad de la inversión. Pero podemos estimar dicha esperanza por la media de las rentabilidades del título a lo largo de los p periodos de tiempo. De esta forma, podemos estimar la rentabilidad del título T_i por $\overline{R}_i$

Además, se acepta como medida del riesgo la dispersión, medida por la varianza o la desviación estándar, de la variable aleatoria que describe la rentabilidad. Así, podemos estimar el riesgo de T_i por $\text{Var}(R_i) = \sigma^2_i$.

	T_1	…	T_n
Rentabilidad	$\overline{R}_1$	…	$\overline{R}_n$
Riesgo	σ^2_1	…	σ^2_n

Consideremos ahora que formamos una cartera invirtiendo un porcentaje x_i en cada uno de los títulos ($\sum_i x_i = 1$):

$$C = \sum_i x_i T_i$$

La rentabilidad de dicha cartera se puede considerar como una variable aleatoria que es combinación lineal de las rentabilidades de cada título:

$$R_C = \sum_i x_i R_i$$

Análogamente a como se hace con los títulos individualizados, la rentabilidad de la cartera se puede estimar por la esperanza. Como la esperanza de una combinación lineal de variables aleatorias es la combinación lineal de sus esperanzas, podemos poner:

$$\overline{R}_C = \sum_i x_i \overline{R}_i$$

Por lo tanto, conociendo las rentabilidades medias de cada título y la proporción en que invertimos en cada uno, es posible conocer la rentabilidad de la cartera.

Para medir el riesgo de la cartera hay que calcular su varianza:

$$Var(R_C) = Var\left(\sum_i x_i R_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

De nuevo, conociendo la matriz de covarianzas de las rentabilidades de cada título y la proporción en la que se invierte, es posible determinar el riesgo de la cartera.

Conociendo las expresiones de la rentabilidad y riesgo de una cartera podemos plantearnos un problema que nos permita obtener una cartera óptima. En ese sentido podemos hacer dos planteamientos: encontrar la cartera más rentable de entre todas las que tienen un riesgo inferior a un nivel prefijado; o encontrar la cartera de menor riesgo de entre todas las que tengan una rentabilidad superior a un valor prefijado.

$$\begin{array}{ll} Max\ \mathrm{Re}(C) & \qquad Min\ Ri(C) \\ Ri(C) \le Ri^* & \qquad \mathrm{Re}(C) \ge \mathrm{Re}^* \\ \sum x_i = 1 & \qquad \sum x_i = 1 \\ x_i \ge 0 & \qquad x_i \ge 0 \end{array}$$

Ejemplo numérico

Consideremos dos títulos, T_1 y T_2, de los que se conocen sus cotizaciones a lo largo de 4 días:

Cotizaciones	T1	T2
Día 1	100	1000
Día 2	150	1100
Día 3	180	1320
Día 4	216	1716

En primer lugar, es necesario calcular sus rentabilidades diarias:

Rent. Diarias	T1	T2
Día 2	0.5	0.1
Día 3	0.2	0.2
Día 4	0.2	0.3

A partir de las rentabilidades diarias podemos obtener las rentabilidades diarias medias y la matriz de covarianzas:

$$R = (0.3, 0.2) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.02 & -0.01 \\ -0.01 & 0.007 \end{pmatrix}$$

Con ello, la rentabilidad y el riesgo de la cartera los podemos expresar como:

$$\mathrm{Re}\,nt(C) = 0.3x_1 + 0.2x_2$$
$$Var(C) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0.02 & -0.01 \\ -0.01 & 0.007 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.02x_1^2 + 0.007x_2^2 - 0.02x_1x_2$$

De esta forma nos podemos plantear uno de los dos problemas indicados anteriormente. Por ejemplo vamos a marcarnos una rentabilidad de 0.25. Deseamos localizar una cartera con una rentabilidad no inferior a 0.25 que tenga el menor riesgo posible:

$$\begin{array}{ll} Min\ Ri(C) & Min\ 0.02x_1^2 + 0.007x_2^2 - 0.02x_1x_2 \\ \mathrm{Re}(C) \geq 0.25 & 0.3x_1 + 0.2x_2 \geq 0.25 \\ \sum x_i = 1 & x_1 + x_2 = 1 \\ x_i \geq 0 & x_i \geq 0 \end{array}$$

Trabajo a realizar

Disponemos de una base de datos con cotizaciones de títulos de la bolsa de Madrid. En concreto disponemos de información de marzo de 1992. Tenemos que encontrar una serie de carteras que cumplan con ciertas condiciones. Para ello el trabajo se organiza en tres partes. En la primera trabajaremos con Access para obtener la información necesaria para poder plantear los problemas de selección en sí. Posteriormente, con Solver resolveremos dos problemas diferentes.

1. Consultas de Access. En la base de datos disponemos de información de prácticamente todos los títulos que cotizaban en la bolsa de Madrid en 1992. Vamos a centrarnos exclusivamente en unos pocos de ellos. Para realizar esta primera selección, vamos a buscar aquellos títulos que han presentado a lo largo de marzo de 1992 una rentabilidad media equivalente al 15% anual. De entre esos títulos, nos quedaremos solamente con los ocho que han presentado menor riesgo durante ese periodo:

- Consulta 1: Determinar, para cada día la cotización al comienzo y al final de la jornada.
- Consulta 2: A partir de la consulta anterior, obtener las rentabilidades diarias de cada título
- Consulta 3: Emplear la consulta 2 para calcular las rentabilidades medias y riesgos (varianzas) de cada título.
- Consulta 4: A partir de la consulta 3, determinar los 8 títulos que, teniendo una rentabilidad media equivalente al 15% anual (o superior), presentan el menor riesgo posible. Indicar el nombre del título y su sector.
- Consulta 5: Tabla de referencias cruzadas en la que figure las rentabilidades diarias para cada uno de los ocho títulos anteriores (columnas), y para cada día del mes (filas). Emplear las consultas 2 y 4.

2. What’s Best: A partir de la información obtenida en la consulta 5, determinar en qué proporción hay que invertir entre los ocho títulos de forma que se obtenga una rentabilidad esperada de al menos el 30% anual, pero con el menor riesgo posible.

3. What’s Best: Cuando se invierte en un título hay que hacerlo en, al menos, un 10% y como mucho en un 35%. ¿Cuál es la nueva solución?